De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreidere antwoorden Hoofdstuk 5
Exponentiële functies

Paragraaf 1 Exponentiële functies

1 **a.** Je mag wel van een artikel van 100 euro uitgaan.
Bij de een krijg je: $100 \to 110 \to 110-11=99$
Bij de ander: $100 \to 90 \to 99$
Beide zijn goedkoper geworden
Met 10% verhogen is vermenigvuldigen met 1,1; met 10% verlagen is vermenigvuldigen met 0,9. Beide vermenigvuldigen met $0{,}9\cdot 1{,}1=0{,}99$, de prijs is dus met 1% verlaagd bij beiden.
b. Even duur

2 **a.** 4% per halfjaar is voordeliger: het tweede halfjaar ontvang je ook nog de rente over de rente van het eerste halfjaar.
Of: 4% per halfjaar is per jaar vermenigvuldigen met $1{,}04^2 > 1{,}08$.

0	1	2	3	4
1000	1210	1331	1464,10	1610,51

c. 1,1
d. $1{,}1^7$
e. $K(t)=1000\cdot 1{,}1^t$
f. Groeifactor per 2 jaar is $1{,}1^2=1{,}21$, dus 21%

3 **a.** 75% van 75% is $0{,}75\times 75\% = 56{,}25\%$
b. $y=100\cdot 0{,}75^x$
c. $100\cdot 0{,}75^8\approx 10$
d. 1,1; 0,75

4 **a.** Als er 20% verdwijnt, blijft er 80% over, dus 0,8.
b. $S(t)=125\cdot 0{,}8^t$
c. $125 / 0{,}8^2\approx 195{,}3$
d. $125\cdot 0{,}8^t=1 \to t=21{,}6$ (Je kunt een tabel maken of de opmerking op blz 182 gebruiken.)

5 **a.** $N(t)=1000\cdot 8^t$
c. $1000\cdot 8^t=10^8 \to t={}^8\log 10^5\approx 5{,}537$
d. Er blijft 10% = $\frac{1}{10}$ over. De kolonie moet 10 keer zo groot worden. $8^t=10 \to t={}^8\log 10\approx 1{,}107$

6 **a.** Afnemen met 8,3% = vermenigvuldigen met $1-0{,}083=0{,}917$. En $0{,}917^8=0{,}49998\approx 0{,}5$.
b. $2\cdot 8=16$ dagen, $0{,}917^8\cdot 0{,}917^8\approx 0{,}5^2\approx 0{,}25$
c. $J(t)=100\cdot 0{,}917^t$
d. $0{,}917^t=0{,}01 \to t=\dfrac{\log 0{,}01}{\log 0{,}917}\approx 53{,}148$ dagen

7 **a.** 7^{p+1} $\quad 7^{p-1}$
7^{2p} $\quad 14^p$
b. $2^3=8$ $\quad 2^2=4$
$2^2=4$ $\quad 16^{0,5}=2^{4\cdot 0,5}=2^2=4$

8 $8^{\frac23}=2^{3\cdot\frac23}=2^2=4$ $\quad 49^{1\frac12}=7^{2\cdot 1\frac12}=7^3=343$
$10000^{\frac34}=10^{4\cdot\frac34}=10^3=1000$ $\quad 8^{-\frac23}=\dfrac{1}{8^{\frac23}}=\frac14$
$49^{-1\frac12}=\frac{1}{343}$ $\quad 10000^{-\frac34}=\frac{1}{1000}$

9 **a.** $x=0{,}8^{-1,5}\to x^2=0{,}8^{-3}=(0{,}512)^{-1}=\dfrac{1}{0{,}512}\to$
$x= x=\sqrt{\dfrac{1}{0{,}512}}=\dfrac{1}{\sqrt{0{,}512}}$
b. $x=5^{3/4}\to x^4=5^3=125\to x=\sqrt[4]{125}$
$x=(\frac12)^{-1,1}\to x^{10}=(\frac12)^{-11}=2^{11}=2048\to x=\sqrt[10]{2048}$

10 **a.** Aan de bovenkant van links naar rechts: $\frac12$, $\frac14$, 4, 2. De horizontale lijn hoort bij $g=1$. Als het grondtal kleiner is dan 1, krijg je een dalende functie, anders een stijgende. Hoe verder het grondtal van 1 afligt, hoe steiler de grafiek loopt.
b. Links van (0,1) ligt de grafiek van $y=(1\frac12)^x$ boven de grafiek van $y=2^x$ en rechts van (0,1) eronder.
Links van (0,1) ligt de grafiek van $y=(\frac23)^x$ onder de grafiek van $y=(\frac12)^x$ en rechts van (0,1) erboven.

11 **a.** (0,1), want $g^0=1$ voor elk getal $g>0$.
b. Dan is $g>1$.
Dan is $0<g<1$.
Het geval $g=1$; dan is de functie constant.
c. Heel licht dalend; bijna horizontaal.
Heel licht stijgend; bijna horizontaal.

12 Stijgend, stijgend, dalend, dalend

13 **a.** De grafiek van $y=x^2$ is symmetrisch in de y-as en heeft een top.
De grafiek van $y=2^x$ is stijgend en heeft een asymptoot.
b. 4 8 16 1024 2^{100}
5 7 9 21 201
c. Ja, 2^{100} is veel groter dan 201.

14 **a.** 2 2 2 2 2
2,25 1,78 1,56 1,21 1,02
b. De relatieve toenames van 2^x zijn constant 2. De relatieve toenames van x^2 worden steeds kleiner en naderen 1.

15 **a.** 1 omhoog verschuiven, spiegelen in de x-as en dan weer 1 omhoog verschuiven.
b. Nee; ja.
c. $y=1$; $y=1$.
d. Bereik f: $y>1$; bereik g: $y<1$.

e. $f(x)=4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=3 \Leftrightarrow g(x)=1-3=-2$

16 a. $a(t)=2^t$
b. $b(3)=a(1\frac{1}{2})$, $b(7)=a(5\frac{1}{2})$, $b(t)=a(t-1\frac{1}{2})$
d. $1\frac{1}{2}$ naar rechts
e. $c(t)=a(t+2)$, 2 naar links
f. $2^{t+2}=2^t\cdot 2^2=2^t\cdot 4$
g. Verticaal met factor 4 (ten opzichte van de x-as).
h. $d(4)=a(6)$, $d(5)=a(7\frac{1}{2})$, $d(t)=a(1\frac{1}{2}t)$
i. Horizontaal vermenigvuldigen met factor $\frac{2}{3}$ (ten opzichte van de y-as).
j. $2^{1\frac{1}{2}}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$; $d(t)=(2\sqrt{2})^t$
k. $2^{1\frac{1}{2}t}=(2^{1\frac{1}{2}})^t=(2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}})^t=(2\sqrt{2})^t$, met regel III, I en V.

17 a. $(2,0)$, $y=(x-2)^2$
b. $(2,3)$, $y=(x-2)^2+3$

18 b. Horizontale verschuiving 3 naar rechts.
c. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{8}$ (ten opzichte van de x-as).
Uit regel 1 (of II): $2^{x-3}=2^x\cdot 2^{-3}=2^x\cdot\frac{1}{8}$

19 a. Gespiegeld ten opzichte van de y-as.
b. Regel VI
c. $x \geq 5$; $x \leq -5$

20 a. Vallen samen.
b. $\frac{1}{2}\cdot 2^x=2^x:2^1=2^{x-1}$; Regel II.
c. Verticaal vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de x-as). Horizontaal verschuiven 1 naar rechts.
d. Dan $2^x \geq 64$, dus $x \geq 6$

21 a. De grafiek van $y=8^x$ vind je door de grafiek van $y=2^x$ met factor $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen t.o.v. de y-as.
$8^x=(2^3)^x=2^{3x}$; Regel III
b. $x \geq 1\frac{2}{3}$, zie **19c**

22 a. $f(1)=1+(1-2^{-1})=1\frac{1}{2}$; $f(5)=1+(1-2^{-5})=\frac{63}{32}$.
b. $f(x)=1+(1-2^{-x})=2-2^{-x}$ als $x \geq 0$.
c. Het rechter deel van de grafiek vind je door het linker deel te spiegelen in de y-as.

Paragraaf 2 Het getal e

1 a. Bijvoorbeeld: de functie f is stijgend, dus is $f'(x)>0$ voor alle x. Maar de formule $x\cdot 2^{x-1}$ geeft negatieve waarden als $x<0$.
b. De grafiek is stijgend, loopt naar links toe steeds vlakker naar de x-as en naar rechts steeds steiler, zo steil als je maar wilt, dus alle positieve waarden en geen andere.

2 a. $\dfrac{2^{a+\frac{1}{2}}}{2^a}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ voor alle a
b. $\dfrac{2^{a+0{,}01}}{2^a}=2^{0{,}01}$ voor alle a

3 b. De grafiek van Y_2/Y_1 lijkt een horizontale lijn te zijn.

5 a. Door horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as. De grafiek van $y=4^x$ is in het punt (0,1) dus 2 keer zo steil als de grafiek van $y=2^x$.
b. $c_4=2\,c_2$

6 $c_8=3\,c_2$, $c_{\frac{1}{2}}=-c_2$, $c_{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}c_2$, zie de vorige opgave, want $8^x=2^{3x}$, $\frac{1}{2}^x=2^{-x}$ en $\sqrt{2}^x=2^{\frac{1}{2}x}$

7

$2\,c_3\cdot 3^x$	$c_3\cdot 3^{x+2}$
$-c_3\cdot 3^{-x}$ (kettingregel)	$\frac{1}{2}c_3\cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ (idem) nb: $\sqrt{3^x}=3^{\frac{1}{2}x}$
$3^x+x\cdot c_3\cdot 3^x$(productregel)	$\dfrac{c_3\cdot 3^x\cdot x-3^x}{x^2}$

8 a. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx 1$ voor kleine waarden van Δx; kies $\Delta x=0{,}001$.
b. $g^{0{,}001}-1\approx 0{,}001 \rightarrow g^{0{,}001}\approx 1{,}001 \rightarrow g \approx 1{,}001^{1000}\approx 2{,}7169...$
c. $g\approx 1{,}00001^{100000}\approx 2{,}7182...$

9 a. $1{,}5^2\approx 2{,}25$ keer zo groot
b. $1{,}25^4\approx 2{,}44$ keer zo groot
c. $1{,}1^{10}\approx 2{,}59$ keer zo groot
d. $1{,}01^{100}\approx 2{,}70$ keer zo groot
e. $e\approx 1{,}00001^{100000}$ of algemeen $e\approx(1+\frac{1}{n})^n$.

10 De grafieken van $Y_1=e^x$ en $Y_2=n\text{Deriv}(Y_1,X,X)$ vallen samen.

11

$y'=2\cdot e^x$	$y'=-e^x$
$y'=e^x$	$y=\frac{1}{2}\cdot e^x$, dus $y'=\frac{1}{2}\cdot e^x$

12

$y'=2\cdot e^{2x}$	$y'=2x\cdot e^{x^2}$
$y'=e^{2+x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}$
$y'=-2\cdot e^{5-2x}$	$y=e^{\frac{1}{2}x}$, dus $y'=\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

13 b. Het ziet er naar uit dat ze elkaar raken in het punt met eerste coördinaat 1. Als $x=1$, dan zijn de y-waarden gelijk: $e^1=e\cdot 1$ en zijn de y'-waarden gelijk, namelijk allebei e.

14 richtingscoëfficiënt $PR = e^x = \dfrac{PQ}{RQ} = \dfrac{e^x}{RQ} \to RQ = 1$

15 $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ (productregel)

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x}\, e^x$ (productregel)

$x \to 1 + e^x = u \to u^2$, dus $y' = 2u \cdot e^x = 2(1+e^x) \cdot e^x$

$x \to 1 + e^x = u \to u^{\frac{1}{2}}$, dus $y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x$

16 a. $e^{10} \approx 22026$

b. $\dfrac{dD}{dt} = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t+10}$; op $t = 0$ geeft dit $-0{,}2 \cdot e^{10} \approx -4405$

c. Aan het minteken: als t groter wordt, wordt $-0{,}2t + 10$ kleiner, dus wordt dan ook D kleiner.

d. $D = 0$

17 a. $f(x)$ is maximaal 1, namelijk als $x = 0$; $f(x)$ nadert tot 0 als $|x|$ heel groot wordt. Dus neemt $f(x)$ alle positieve waarden aan die ≤ 1 zijn.

b. $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$ $f''(x) = -2\, e^{-x^2} + -2x \cdot -2x\, e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)\, e^{-x^2}$, dus $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Buigpunten: $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{e}\sqrt{e})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{e}\sqrt{e})$.

Paragraaf 3 De natuurlijke logaritme

1 a. $p > 0$ en q kan alle waarden aannemen.

b. 0 $\quad {}^2\log\sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{2}$, dus $x = \frac{1}{2}$

1 $\quad$ -1

3 $\quad$ -3

2 a. Door spiegeling in de lijn $x = y$.

b. $x > 0$; y kan elk getal zijn.

3 $500 \cdot 2^x = 3750 \Leftrightarrow 2^x = 7{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 7{,}5}{\log 2} \approx 2{,}9$ uur.

4 a. Door 2 omhoog te schuiven.
Regel I: ${}^2\log 4x = {}^2\log 4 + {}^2\log x = 2 + {}^2\log x$.

b. Door verticaal met 3 te vermenigvuldigen (ten opzichte van de x-as). Regel III: ${}^2\log x^3 = 3 \cdot {}^2\log x$.

c. Door te spiegelen in de x-as.

Regel II: ${}^2\log \dfrac{1}{x} = {}^2\log 1 - {}^2\log x = -{}^2\log x$.

d. Door verticaal te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de x-as).

Regel IV: ${}^4\log x = \dfrac{{}^2\log x}{{}^2\log 4} = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x$.

5 a. Die is $1/0{,}69 \approx 1{,}45$. (Als je een lijn met richtingscoëfficiënt $a \neq 0$ in de lijn $y = x$ spiegelt, dan krijg je een lijn met richtingscoëfficiënt $\dfrac{1}{a}$.)

b. In (4, 2) is de helling ongeveer 0,36.

c. In $(\frac{1}{2}, -1)$ is de helling ongeveer 2,86.

6 a. Afnemende stijging.

b. y' is positief en dalend.

7 b. De positieve getallen; alle getallen.

8 0 $\quad \frac{1}{2}$

1 $\quad$ -1

3 $\quad$ -3

9 a. Het enige verschil is dat grondtal 2 is vervangen door grondtal e.

b. 4,605...; klopt.

10 b. y_2 is het omgekeerde van x; $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

11 a. $e^{\ln 3} = 3$

b. $\frac{1}{3}$ (omgekeerde van **a**)

12 a. $\frac{1}{2}$

b. 1

c. $\dfrac{1}{x}$

13 a. 1

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx} = x \cdot \dfrac{du}{dx}$

c. $x \cdot \dfrac{du}{dx} = 1 \to \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

14 a. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, de richtingscoëfficiënt .
Vergelijking $y = \frac{1}{e}x + b$. De lijn gaat door (e,1), dus $b = 0$. Vergelijking is dus $y = \frac{1}{e}x$.

b. Richtingscoëfficiënt $= \frac{1}{5}$, dus een vergelijking is: $y = \frac{1}{5}x + b$. De lijn gaat door $(5, \ln 5)$, dus $b = -1 + \ln 5$, een vergelijking is: $y = \frac{1}{5}x - 1 + \ln 5$

15 $y' = \dfrac{1}{x}$ (somregel) $\qquad y' = -\dfrac{1}{x}$

$y' = \dfrac{2}{x}$ (veelvoudregel) $\qquad y' = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

16 $y' = \dfrac{1}{x}$ (want $\ln 2x = \ln x + \ln 2$, somregel)

$y' = \dfrac{1}{2+x} \cdot 1$ (kettingregel)

$x \to x^2 = u \to \ln u$, dus $y' = 2x \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

$x \to \ln x = u \to u^2$, dus $y' = 2u \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$

17 $y' = 2 + \dfrac{3}{x}$ (somregel en veelvoudregel)

$y' = \dfrac{-\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}$ (quotiëntregel)

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$(productregel)

$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$ (productregel)

18 a. $L = 102{,}3 - 4{,}3 \ln 80a - 0{,}03a$. Als a toeneemt, nemen $4{,}3 \ln 80a$ en $0{,}03a$ beide toe en neemt L dus af.

b. $L = 86{,}5 - 4{,}3 \ln 100v + 0{,}16v$.

$L' = \dfrac{-4{,}3}{v} + 0{,}16 = 0$ als $v = \dfrac{4{,}3}{0{,}16} \approx 26{,}875$. Met de grafiek blijkt dat L dan inderdaad minimaal is.

c. $L' = \dfrac{-4{,}3}{av} \cdot a + 0{,}16 = \dfrac{-4{,}3}{v} + 0{,}16$ hangt niet af van a. De waarde van v waarvoor $L' = 0$ (en L minimaal is) hangt dus ook niet af van a.

19 a. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow x = \mathrm{e} \rightarrow$ de top is $(\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})$

b. $f''(x) = \dfrac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 2x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow -1 - (2 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1\frac{1}{2} \rightarrow x = \mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}$,het buigpunt is $(\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}, 1\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1\frac{1}{2}})$.

Paragraaf 4 Bij andere grondtallen

1 a. $8^{\frac{1}{3}x}$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor 3 (ten opzichte van de y-as).

2 a. $3^{{}^{3}\log 2 \cdot x} = \left(3^{{}^{3}\log 2}\right)^x = 2^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{{}^{3}\log 2}$ (ten opzichte van de y-as).

3 a. $\mathrm{e}^{\ln 2 \cdot x} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^x = 2^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de y-as).

4 a. $\mathrm{e}^{\ln g \cdot x} = \left(\mathrm{e}^{\ln g}\right)^x = g^x$

b. Horizontale vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{\ln g}$ (ten opzichte van de y-as).

5 a. 504

b. $1015 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}14h} = 280 \Leftrightarrow -0{,}14h = \ln 280 - \ln 1015$ dus $h \approx 9{,}2$ km

c. $\mathrm{e}^{-0{,}14h} = \left(2^{{}^{2}\log \mathrm{e}}\right)^{-0{,}14h} = 2^{-0{,}14h \cdot {}^{2}\log \mathrm{e}} \approx 2^{-0{,}20h}$, dus $L = 1015 \cdot 2^{-0{,}20 \cdot h}$

d. $L = 1015 \cdot 10^{-0{,}06 \cdot h}$, $(10^{\log \mathrm{e} \cdot -0{,}14 \cdot} = 10^{-0{,}06})$

e. Het getal dat er moet komen staan nomen we g. Dan $g^{{}^{g}\log \mathrm{e} \cdot -0{,}14} = g$, dus ${}^{g}\log \mathrm{e} = -\frac{1}{0{,}14}$, dus $g = \mathrm{e}^{-0{,}14} \approx 0{,}87$, dus $L = 1015 \cdot 0{,}87^h$

6 a. $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{\ln 2 \cdot x} = (\mathrm{e}^{\ln 2})^x = 2^x = y$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{dy}{du} = \ln 2 \cdot \mathrm{e}^u = \ln 2 \cdot 2^x$

c. $c_2 = 0{,}6931471806$

7 a. $\ln 10 \cdot 10^x \approx 2{,}3 \cdot 10^x$

b. $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot (\frac{1}{\mathrm{e}})^x = -(\frac{1}{\mathrm{e}})^x$

c. $\ln \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$

8 a. $(\ln 2) \cdot 2^2 = (\ln 2) \cdot 4 = \ln 2^4 = \ln 16$

b. $\ln \sqrt{2}$

9 a. ${}^{4}\log x = \dfrac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 4} = \dfrac{{}^{2}\log x}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x$

b. ${}^{8}\log x = \frac{1}{3} \cdot {}^{2}\log x$

c. ${}^{\frac{1}{2}}\log x = -1 \cdot {}^{2}\log x$

10 a. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de x-as).

b. Verticale vermenigvuldiging met achtereenvolgens de factoren $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en -1 (ten opzichte van de x-as).

11 a. ${}^{2}\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

b. Verticale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{\ln 2}$ (ten opzichte van de x-as).

12 $\frac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{x}$

13 a. $\frac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x} \approx 0{,}43 \cdot \dfrac{1}{x}$

b. $\frac{1}{\ln \frac{1}{\mathrm{e}}} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x}$

c. $\frac{1}{\ln \mathrm{e}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

14 a. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 790 = 1{,}961$ km ≈ 1960 meter.

b. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 950 = 0{,}633$ km ≈ 635 meter.

c. $50 - 7{,}2 \cdot \ln 900 = 1{,}023$ km ≈ 1020 meter.

d. $7{,}2 \cdot \ln L = 7{,}2 \cdot \dfrac{{}^{2}\log L}{{}^{2}\log \mathrm{e}} = \dfrac{7{,}2}{{}^{2}\log \mathrm{e}}\ {}^{2}\log L$, dus $h = 50 - 4{,}99 \cdot {}^{2}\log L$

e. $\frac{7{,}2}{\log e} \approx 16{,}58$, dus $h = 50 - 16{,}58 \cdot \log L$

f. $\frac{7{,}2}{{}^{g}\log e} = 1 \Leftrightarrow g^{7{,}2} = e$, dus $g = e^{1/7{,}2} \approx 1{,}15$, dus $h = 50 - {}^{1{,}15}\log L$

g. $h = 50 - 7{,}2 \cdot \ln L \to \ln L = 6{,}94 - 0{,}14h \to$ $L = e^{6{,}94 - 0{,}14h} = e^{6{,}94} \cdot e^{-0{,}14h} \approx 1033 \cdot e^{-0{,}14h}$; klopt redelijk.

15 $x \to x^2 + 1 = u \to {}^2\log u = y$, dan $y' = 2x \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{u}$, dus

$y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$

$y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}$ want ${}^2\log(ex) = {}^2\log e + {}^2\log x$

$x \to \frac{1-x}{1+x} = u \to {}^3\log u = y$, dan

$y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$

$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{-2}{1+x} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-2}{1-x^2}$

$y' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$, want $\log\sqrt{ex} = \frac{1}{2}\log e + \frac{1}{2}\log x$.

Paragraaf 5 Gemengde opgaven

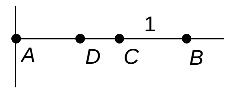
1 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a \cdot x}$. Als $x = 1$, dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a}$. Als $a > 1$, ligt P onder de x-as. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan $\frac{OP}{1} = \frac{3}{1}$. Dus $\frac{1}{\ln a} = 3$. Dus $a = e^{\frac{1}{3}}$. Als $a < 1$, ligt P boven de x-as. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan -3. Dan $\frac{1}{\ln a} = -3$. Dus $a = e^{-\frac{1}{3}}$.

2 **a.** $f'(x) = 2^x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x = 2^x(1 + \ln 2 \cdot x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\ln 2} = -{}^2\log e$ met regel IV.

b. $p \cdot 2^p = (p+2) \cdot 2^{p+2} \to p = (p+2) \cdot 2^2 \to p = 4p + 8 \to p = -2\frac{2}{3}$.

3 **a.** $g(x) = 2^{2x} = f(2x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ (ten opzichte van de y-as). $h(x) = 2^{3x} = f(3x)$, dus horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ (ten opzichte van de y-as).

b.



Uit **a** volgt $AC = \frac{1}{2}AB$ en $AD = \frac{1}{3}AB$. $\to AD = \frac{2}{3}$ en $CD = \frac{1}{3}$.

c. $P = (p, 2^p)$; $f'(p) = \ln 2 \cdot 2^p$. Omdat de raaklijn door de oorsprong gaat, geldt $\frac{f(p)}{p} = \ln 2 \cdot 2^p \to$ $\frac{2^p}{p} = \ln 2 \cdot 2^p \to p = \frac{1}{\ln 2} = {}^2\log e$.

4 **a.** $f(x) = 0 \to \ln x(\ln x - 2) = 0 \to x = 1$ of $x = e^2$, dus (1,0) en $(e^2,0)$

b. $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 2}{x}$; $f'(x) = 0 \to x = e$; top: (e, -1).

c. $f''(x) = \frac{4 - 2\ln x}{x^2}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$, dus $x = e^2$ $\to$ buigpunt: $(e^2, 0)$.

$f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$, dus buigraaklijn: $y = \frac{2}{e^2}x + b$; $(e^2, 0)$ ligt op de lijn $\to b = -2 \to$ buigraaklijn: $y = \frac{2}{e^2}x - 2$.

d. $f(x) = 3 \to (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \to (\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0 \to x = e^3$ of $x = e^{-1}$.

5 $A(x)$ is de afstand in het kwadraat van punt $(x, f(x))$ tot O. $A(x) = x^2 + 4e^{-2x^2}$. $A(x)$ minimaal $\to A'(x) = 0$ $\Leftrightarrow 2x - 16x \cdot e^{-2x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 8e^{-2x^2}) = 0 \Leftrightarrow$ $x = 0$ of $e^{-2x^2} = \frac{1}{8}$.

$x = 0$ voldoet niet, dus $e^{-2x^2} = \frac{1}{8} \to 2x^2 = \ln 8 \to$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\ln 8}$.

6 **a.** $2e^{x+1} = e^{\ln 2} \cdot e^{x+1} = e^{x+1+\ln 2}$

b. $f(x) = 0 \to e^{2x} = e^{x+1+\ln 2} \to 2x = x + 1 + \ln 2 \to$ $x = 1 + \ln 2$.

c. $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x+1}$; $f'(x) = 0 \to e^{2x} = e^{x+1} \to$ $2x = x + 1 \to x = 1$; $f(1) = e^2 - 2e^2 = -e^2$.

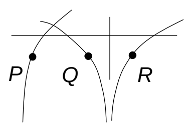
d. $f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x+1}$; $f''(x) = 0 \to 2e^{2x} = e^{x+1} \to$ $e^{2x+\ln 2} = e^{x+1} \to 2x + \ln 2 = x + 1 \to x = 1 - \ln 2$.

7 **a.** Voor $x < 0$ geldt $g(x) = \ln(-x)$; $g'(x) = -1 \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ $\to$ $g'(-1) = -1 \to$ vergelijking raaklijn: $y = -x - 1$.

b. $P = (p, 0)$. $f(p) = 0 \to \ln(2p + 4) = 0 \to 2p + 4 = 1 \to p = -1\frac{1}{2}$.

$f'(x) = \frac{1}{x+2} \to f'(-1\frac{1}{2}) = 2$, raaklijn heeft vergelijking $y = 2x + b$ en raaklijn gaat door $(-1\frac{1}{2}, 0)$, dus vergelijking is $y = 2x + 3$.

c.



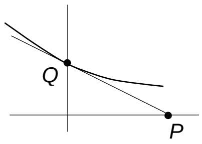
Neem aan: $R = (r, g(r))$, dan $Q = (-r, g(-r))$ en $P = (-3r, f(-3r))$.

Er geldt $f(-3r) = g(r)$, dus $\ln(-6r + 4) = \ln r$, dus

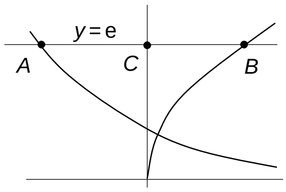
$-6r+4=r \rightarrow r=\frac{4}{7} \rightarrow a=g(r)=\ln\frac{4}{7}$.

8 **a.** $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=0 \rightarrow x=\sqrt{x}$ en $x\neq 0 \rightarrow$ $x=1$.
$f(1)=2$. De extreme waarde is 2.
b. $f''(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-\sqrt{x}+2}{2x^2}$;
$f''(x)=0 \rightarrow \sqrt{x}=2 \rightarrow x=4$.
Buigpunt: $(4, 4-\ln 4)$; $f'(4)=\frac{1}{4}$, dus vergelijking buigraaklijn: $y=\frac{1}{4}x+3-\ln 4$.

9 **a.**



$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$; $f'(0)=-\frac{1}{2}$, dus $\dfrac{OQ}{OP}=\frac{1}{2}$; verder $OQ=1$, dus $OP=2$; opp. $\Delta OPQ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$.
b.



Stel $A=(a, f(a))$m, dan $f(a)=e$, dus $a=-2$.
$B=(b, f(b))$; $a=-2$, dus $b=2$; $g(2)=e$, dus $p\sqrt{2}=e$, dus $p=\frac{1}{2}e\sqrt{2}$.

10 **a.** Het gemiddelde van $f(x)$ en $g(x)$ is 1, dus $f(x)+g(x)=2$, dus $g(x)=2-f(x)=2-(\ln x)^2$.
b. Snijpunt links van de lijn: $B=(b, f(b))$; dan $f(a)=f(b) \rightarrow (\ln a)^2=(\ln b)^2 \rightarrow \ln b=-\ln a=\ln\frac{1}{a}$, dus $b=\frac{1}{a}$.
c. $a-\frac{1}{a}=4\frac{4}{5} \Leftrightarrow a^2-4\frac{4}{5}a-1=0 \Leftrightarrow (a-5)(a+\frac{1}{5})=0$, dus $a=5$ (want a ligt rechts van 1).

Rekentechniek

1 $y_1={}^{2}\log e+{}^{2}\log x$, dus y_1 en z_1 verschillen een constante.
Dat $y_2=z_2$ volgt uit de regel: $\log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}$.
$y_3=\frac{1}{2}(\log ex)=\frac{1}{2}\log e+\frac{1}{2}\log x$, dus y_3 en z_3 verschillen een constante.

2 2e $\quad$ $e\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}e$ $\quad$ $\frac{1}{2}e^3$

3 e^2, $\frac{1}{e^2}$ $\quad$ $\dfrac{2e}{e-1}$
e^2, $\frac{1}{e^2}$ $\quad$ 1

4 e $\quad$ e^3
voor alle $x>0$ $\quad$ 4

5 e^3, $\frac{1}{e}$ $\quad$ e^2, $\sqrt{e}$
e^2, $\frac{1}{e}$ $\quad$ e^{25}

6 $\ln 3$ $\quad$ $\ln 2$, $\ln\frac{1}{2}$
0 $\quad$ 0

7 2
10, 100
$\ln 3$
3
1, $\log 2$

8 $\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$